COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures)
(note sur 20)

L'épreuve comporte deux parties indépendantes. Les valeurs indiquées pour chacune de ces parties sont indicatives de leur importance relative.

PARTIE I (notée sur 5)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point A de coordonnées (1, 0) et le cercle (C) de centre O et de rayon 1.

1) Soit $\theta \in [-\pi, +\pi]$; on note $M(\theta)$ le point de (C) de coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$. Déterminer l'équation de la tangente $T(\theta)$ à (C) au point $M(\theta)$.

2) On appelle $H(\theta)$ l'image du point A par la projection orthogonale sur $T(\theta)$. On appelle $x(\theta)$ et $y(\theta)$ les coordonnées de $H(\theta)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Donner l'expression de $x(\theta)$ et de $y(\theta)$.

3) On s'intéresse maintenant à la courbe (Γ) définie par les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta + \sin^2\theta \\ y(\theta) = \sin\theta.(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

quand θ parcourt l'intervalle $[-\pi, +\pi]$.

Etudier la courbe (Γ) et en donner une représentation graphique. On étudiera en particulier l'existence de symétries et l'allure de (Γ) au voisinage du point $(x(0), y(0))$.

PARTIE II (notée sur 15)

A Dans cette partie A, on considère une suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où, pour tout $i \in \mathbb{N}$, a_i est un nombre réel strictement positif. On suppose que la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0. On se propose d'étudier la série de terme général $(-1)^i a_i$ pour $i \in \mathbb{N}$.

1 - Pour tout entier n positif ou nul, on pose :

$$R_n = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i a_i , \qquad T_n = \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i a_i , \qquad S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_i .$$

1 - a) Montrer que la suite (R_n) est convergente. On note S sa limite.

1 - b) Montrer que la suite (T_n) est convergente vers S.

1 - c) Montrer les inégalités suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le R_n - S \le a_{2n+1}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le S - T_n \le a_{2n+2}$$

En déduire la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S_n - S| \le a_{n+1}$.

1 - d) Montrer que la série de terme général $(-1)^i a_i$ converge.

2 - On s'intéresse désormais à la série de terme général $\frac{(-1)^i}{i+1}$ $(i \in \mathbb{N})$.

2 - a) Montrer que cette série converge.

Tournez la page S.V.P.

2 - b) En utilisant le résultat de la question 1-c) et le développement en série entière de la fonction f définie sur] -1, 1[par f(x) = ln(1+x), montrer que l'on a :

$$\forall x \in]0,1[, \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\left| \ln 2 - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1} \right| \leq \left| \ln 2 - \ln(1+x) \right| + \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i x^{i+1}}{i+1} - \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i+1} \right| + \frac{1}{n+2}$$

2 - c) Déduire de la question 2-b) la valeur de $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1}$

B Pierre et Marie jouent à un jeu. Pour jouer une partie de ce jeu, ils tirent aléatoirement un entier n strictement positif, selon une certaine loi de probabilité ; si n est impair, Pierre gagne : Marie donne n francs à Pierre, et on considère que le gain de Pierre vaut +n ; si n est pair, Marie gagne : Pierre donne n francs à Marie, et on considère que le gain de Pierre vaut −n. On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre n tiré aléatoirement, et g(n) le gain de Pierre lorsque X = n.

1 - Dans toute cette question, la loi de probabilité de X est donnée par

$$P(X=n) = \frac{\lambda}{n(n+1)} \text{ , pour } n \geq 1, \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante réelle.}$$

1 - a) Calculer λ.

1 - b) Calculer la probabilité que Pierre gagne une partie.

1 - c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} g(n).P(X=n)$.

1 - d) Pierre et Marie font deux parties successives. On note Y la variable aléatoire représentant le gain (cumulé) de Pierre à l'issue de ces deux parties.

- Déterminer la probabilité de l'événement Y = 0.
- Déterminer la probabilité de l'événement Y = 2.
- Déterminer la probabilité de l'événement Y = 1 ; pour cela, on pourra calculer $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ en admettant le résultat $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2 - Maintenant la loi de probabilité de X est donnée par

$$P(X=n) = \frac{\mu}{2^n} \text{ , pour } n \geq 1, \quad \text{où } \mu \text{ est une constante réelle.}$$

2 - a) Calculer μ.

2 - b) Calculer la probabilité que Pierre gagne une partie.

2 - c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} g(n).P(X=n)$.

2 - d) Pierre et Marie font, comme dans la question 1-d), deux parties successives, et on désigne à nouveau par Y la variable aléatoire représentant le gain de Pierre à l'issue de ces deux parties. Déterminer l'espérance de Y.

2 - e) Que vaut la probabilité de l'événement $Y \geq 0$?

2 - f) Sachant que Y est positive ou nulle, quelle est la probabilité que Pierre ait gagné les deux parties ?